Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Московский государственный строительный университет
Ассоциация московских вузов

Утверждаю
Проректор по УМР и МД

_____________Гагин В.И.
«___»_________2009 г.

ОТЧЕТ
о выполнении подраздела мероприятий
по социальному обслуживанию населения
в части предоставления образовательных услуг
жителям города Москвы

Подраздел №11.5.2.5. «Научно-методологические проблемы применения новых методов проектирования для решения комплексных задач современного строительства»
(Научно-образовательный материал)

	Должность	Телефон	Подпись Дата	ФИО
Научный руководитель подраздела	Доцент каф. ИПМ МГСУ	(499) 183-59-94		Кайтуков Т.Б.
Ответственный исполнитель	Зав. лаб. ЛРК			Енговатов И.А.

Москва, 2009 г.

Под научным руководством и при непосредственном участии доцента каф. ИПМ Кайтукова Т.Б. (отв. исполнитель зав. лаб. ЛРК Енговатов И.А.) в рамках подраздела 11.5.2.5. были разработаны и вручены для практического использования заинтересованным специалистам строительного комплекса Москвы научно-образовательные материалы в области исследования научно-методологические проблемы применения новых методов проектирования для решения комплексных задач современного строительства на примере обзора, анализа и сопоставления современных численных методов решения краевых задач расчета конструкций.

СОДЕРЖАНИЕ

		Стр.
	ВВЕДЕНИЕ	4
1.	Разностные методы расчета строительных конструкций	6
2.	Метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий и сооружений	8
3.	Метод граничных интегральных уравнений для расчета строительных конструкций	10
4.	Метод дискретных граничных уравнений для расчета строительных конструкций	12
5.	О получении численного решения	14
6.	Локальные решения и дискретные фундаментальные функции	16
	Заключение	18
	Рекомендуемая литература	19

ВВЕДЕНИЕ.

При расчете строительных конструкций практическую ценность имеет исследование и решение краевых задач. Для их формулировки необходимо наличие дифференциального уравнения в частных производных, определенных во всех точках области (конструкции), а также краевых условий: начальных и граничных.

Формулировки краевых задач для основных типов строительных конструкций и их элементов, таких как оболочки, балка-стенка, получены сравнительно давно. Однако, в связи с созданием материалов с новыми свойствами, уточнением физических моделей и теоретической базы эти формулировки усложняются и совершенствуются. Эти обстоятельства являются одной из причин развития и совершенствования алгоритмов и методов решения краевых задач.

Краевая задача может быть поставлена в операторном виде или на основе вариационных принципов. В случае операторной записи решение получается в классе функций, имеющих производные того же порядка, что и порядок исходного уравнения. Однако здесь могут возникнуть сложности, связанные с возможной несимметричностью системы разрешающих дискретных уравнений при исходной симметричной или самосопряженной задаче. Кроме того, при аппроксимации необходимо вводить законтурные точки, что влечет существенные трудности при стыковке краевых задач.

Вариационная постановка позволяет избежать многих недостатков, связанных с записью в операторном виде. Постановка идет в виде функционала энергии (при расчете конструкций методом перемещений – функционала работ), который соответствует дифференциальному уравнению. Здесь в два раза понижается высший порядок производных, входящих в подинтегральное выражение, а учет естественных граничных условий происходит автоматически. Еще один плюс в том, что структура системы дискретных линейных уравнений остается симметричной. Существенным недостатком при аппроксимации в данном случае является потеря точности при удовлетворении граничных условий в «среднем» (интегральном смысле).

В операторном виде, по сравнению с вариационной постановкой, лучше формулировать задачи, которые решаются с помощью итерационных методов, а также задачи, для которых вариационная постановка влечет значительные трудности.

Одним из распространенных способов расчета конструкций является использование численных методов. Наиболее известными из них являются разностные методы, метод конечных элементов и метод граничных интегральных уравнений.

1. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.

Исторически первыми численными методами оказались вариационные, теоретические основы и выкладки которых можно найти в работах В.З. Власова [14] и С.Г. Михлина [45]. С появлением вычислительной техники первоначально получили развитие разностные методы. В традиционной постановке они особенно эффективны для решения задач с простыми контурами области и краевыми условиями, а также для одномерных задач. В основе этих методов лежит операторная запись краевой задачи, аппроксимация и алгоритмы формирования и решения дискретных систем. Их характерным достоинством является возможность составления системы алгебраических уравнений с разреженными матрицами, что существенно облегчает счет и экономит время. Теоретический фундамент для этих методов заложили следующие отечественные и зарубежные ученые: В.Б. Андреев [67], А.О. Гельфонд [18], А.А. Самарский [64], С.К. Годунов и В.С. Рябенький [19], В.К. Саульев [68], Е.Г. Дьяконов [23], В. Вазов и Д. Форсайт [8], Р. Ритхмайер, К. Мортон [58] и др.

В строительной механике решению задач методом конечных разностей посвящены работы П.М. Варвака [10], М.И. Длугача [22] и др. Близкая к конечным разностям дискретная постановка задачи теории упругости на основе замены континуальной модели стержневой была предложена А.Р. Ржаницыным [57].

Среди недостатков разностных методов можно отметить сложность аппроксимации граничных условий для областей произвольной формы. Выходом здесь могут служить методы стандартной (фиктивной) области, суть которых в создании алгоритмов и программ не для конкретной области, а для окаймляющей области более простой формы, например, прямоугольника или квадрата. Варианты такого подхода можно найти в работах И.Е. Капорина, Е.С. Николаева [35], Г.П. Астраханцева [2], Г.И. Марчука [42] и др.

Вариант метода стандартной области, предложенный А.Б. Золотовым [26], применим при решении задач теории упругости. Задача формулируется на стандартной окаймляющей области при помощи характеристической функции θ и δ-функции. Использование аппарата обобщенных функций позволяет описывать единый алгоритм и программу решения задач теории упругости для конструкций различной формы. Основополагающие результаты по созданию теории обобщенных функций можно найти у С.Л. Соболева [69], Л. Шварца [84], Ж.-Л. Лионса [40], И.М. Гельфанда [17], Г.Е. Шилова [85].

Следует отметить и вариационно-разностный метод, разработанный несколько позже и строящийся на основе вариационной формулировки граничной задачи. В этой связи необходимо упомянуть таких ученых как Л.А. Оганесян и Л.А. Руховец [53], Д.В. Вайнберг и Е.Д. Вайнберг [9]. Основное преимущество этой схемы над методом конечных разностей заключается в автоматическом удовлетворении естественных краевых условий задачи, а также симметрии и положительной определенности матрицы разрешающей системы уравнений.

2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ.

Одним из универсальных и наиболее применяемых на практике методов решения краевых задач является метод конечных элементов. На основе этого метода реализовано большинство программных комплексов «промышленного типа». Его суть состоит в том, что область сложной формы, на которой решается исходная задача, моделируется с помощью отдельных частей – конечных элементов. Непрерывные функции, которые описывают физические и механические величины, здесь заменяются приближенными. Эти приближенные функции являются непрерывными, дифференцируемыми нужное число раз в пределах каждого конечного элемента. Положительным моментом служит возможность применения как треугольных, так и более сложных по форме, криволинейных конечных элементов. Нельзя не отметить, алгоритмическое удобство метода, в виду локальности используемых базисных функций матрица системы разрешающих уравнений в большинстве случаев получается сильно разреженной. Однако стандартный метод конечных элементов не дает достаточно точного решения на границе области, что является важным, так как максимальные усилия и зоны концентрации возникают, преимущественно, именно на границе области, которая является ответственным местом в конструкции. Для избежания этого необходимо применять специальные конечные элементы [37].

Первое упоминание о методе конечных элементов появилось в работах А. Хренникова [93] и Р. Куранта [91]. Причем Р. Курант с помощью треугольных элементов и линейной интерполяции получил дискретизацию краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Идею моделирования упругой сплошной среды на основе конечных элементов можно найти в работах Дж. Аргириса [86], М. Тернера, Р. Клафа, Х. Мартина, Л. Топпа [95]. Большой вклад в совершенствование метода внесли как советские ученые: Л.А. Розин [61], А.П. Филин [79], В.А. Постнов [56], А.С. Городецкий [20], Н.Н Шапошников

[83], так и зарубежные ученые: О. Зенкевич [25], К. Васидзу [11], Г. Стренг и Дж. Фикс [73], К. Бате и Е. Вилсон [3], Ф. Сьярле [74] и др.

Вначале используемый как инженерный метод, метод конечных элементов постепенно превращается в средство для численного решения задач теплопередачи, гидродинамики и др. Данный метод также широко применяется при расчете транспортных сооружений [21], машиностроительных конструкций [49], гидротехнических сооружений [60], при конструировании летательных [51] и космических аппаратов [77], а также для решения других инженерных задач.

Ограничивающей стороной метода конечных элементов, вследствие его приближенности, является сложность решения в неограниченных областях, еще один недостаток – резкое возрастание вычислительных затрат при увеличении алгебраической размерности системы разрешающих уравнений при ее решении методом Гаусса.

3. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.

В настоящее время для решения задач различного уровня сложности часто применяется метод граничных интегральных уравнений. Метод базируется на использовании функции Грина на расширенной области, включающей и область, занимаемую конструкцией, и фундаментальной функции. Другой возможный путь получения граничных интегральных уравнений заключается в применении формулы Сомильяны в сочетании с формулами Грина на неограниченной области. Удобство метода состоит в том, что в качестве неизвестных в интегральные уравнения входят функции только на границе области, в то время как при дифференциальной краевой задаче требуется нахождение функций во всей области. Основным отличием метода граничных интегральных уравнений от метода конечных элементов при аппроксимации является способ дискретизации, в случае интегральных уравнений она осуществляется не внутри области, а на границе.

Метод обладает большей точностью по сравнению с другими численными методами за счет того, что решение задачи зависит только от значений напряжений и перемещений на границе, точно удовлетворяя уравнениям внутри области. Размерность задач здесь ниже на единицу, получаемая разрешающая система относительно граничных точек хорошо обусловлена, однако матрица коэффициентов при неизвестных, как правило, полностью заполнена и несимметрична. Применение метода также усложняется наличием интегралов от сингулярных функций.

Различают две группы граничных интегральных уравнений: прямая и непрямая формулировки. При прямой формулировке интегральные уравнения на границе непосредственно связывают механические величины – усилия и смещения. В случае непрямой формулировки в роли неизвестных выступают функции, называемые плотностями потенциалов, под которыми понимают фиктивные нагрузки или скачки (разрывы) смещений на границе. В задачах о трещинах эти скачки перемещений перестают быть фиктивными, а приобретают смысл фактических взаимных смещений берегов трещин.

Теоретическим обоснованием и практическим применением метода граничных интегральных уравнений занимались С.Г. Михлин [43], [44], Н.И. Мусхелишвили [47], [48], В.Д. Купрадзе [39], В.З. Партон и П.И. Перлин [54], А.Г. Угодчиков и Н.М. Хуторянский [75], Ф. Риццо [59], Т. Крузо [38], К. Бреббия, Ж. Таллес и Л. Вроубел [7] и др.

Значительную роль в становлении данного метода сыграло и использование обобщенных решений. Здесь необходимо привести работы А.И. Цейтлина [80] и Л.Г. Петросяна [81]. Свойства δ -функции и ее производных использованы в понятии n-кратного слоя, трактующего переход от уравнений, действующих на области занимаемой конструкцией, к уравнениям на границе.

В методе компенсирующих нагрузок (вариант непрямого метода), разработанном Б.Г. Кореневым [42], задача формулировалась на расширенной области с приложением дополнительной фиктивной нагрузки, обеспечивающей выполнение граничных условий. Метод получил развитие в работах О.В. Лужина [41], Э.С. Венцеля [12] и др.

Существенным недостатком метода граничных интегральных уравнений является его опора на существование простого аналитического выражения фундаментального решения системы дифференциальных уравнений. Вследствие этого, он менее эффективен для расчета конструкций с переменными свойствами материала, непрерывно зависящими от координат.

4. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.

Как уже отмечалось выше, метод конечных элементов и метод граничных интегральных уравнений имеют ряд сильных сторон и свои недостатки. Совместное применение данных методов для дискретизации конструкций является весьма эффективным путем, например, при расчете системы сооружение-основание. Дискретизация конструкций сооружения может быть получена при помощи метода конечных элементов, а дискретизация основания уже производится на основании метода граничных элементов. После дискретизации решается совместная система алгебраических уравнений.

Отличие дискретных граничных уравнений от их непрерывных аналогов состоит в том, что не возникает сложностей, связанных с вычислением сингулярных интегралов. Именно этой сложностью вычисления объясняется малое использование симметричных вариантов метода граничных элементов.

Среди набора алгоритмов, предназначенных для получения дискретных граничных уравнений, необходимо отметить следующие: метод разностных потенциалов, разработанный В.С. Рябеньким [62], [63], а также метод суперэлементов [55].

Первый метод основывается на работах А. Кальдерона [90] и Р. Сили [94]. Данный метод является по сути близким к методу граничных интегральных уравнений, сочетая при этом универсальность и алгоритмичность разностных методов с понижением геометрической размерности и простотой учета граничных условий. Дискретные уравнения здесь рассматриваются как аналоги операторных граничных уравнений с проекторами, не прибегая к помощи фундаментальных функций или функции Грина и не используя интегралов на границе области. Все построения здесь осуществлялись на дискретном уровне, соответствующем разностной аппроксимации краевой задачи. Метод разностных потенциалов в ряде случаев применим для решения задач с переменными коэффициентами. Следует сказать, что все известные варианты данного метода приводят к системам алгебраических уравнений с несимметричными матрицами.

Широкое распространение при расчетах сложных инженерных сооружений получил метод суперэлементов. Система уравнений равновесия суперэлемента является результатом исключения внутренних степеней свободы для подконструкции, которые однозначно могут быть выражены через граничные степени свободы. С математической точки зрения такое исключение неизвестных эквивалентно сведению задачи на границу при помощи функции Грина дискретной краевой задачи для конечноэлементной модели подконструкции с закрепленными граничными узлами. Таким образом, уравнения равновесия суперэлемента представляют собой дискретные граничные уравнения, аналогичные граничным интегральным уравнениям.

В диссертации И.В. Ширинской приведены алгоритмы метода дискретных граничных уравнений, направленные на решение двумерных краевых задач строительной механики. В этой работе предполагается, что граница области совпадает с линиями регулярной прямоугольной сетки. В узлах границы могут быть заданы граничные условия первого рода (кинематические) и второго рода (статические). Там, где есть необходимость, условия закрепления могут быть заданы также для степеней свободы внутренних узлов области. Такие узлы считаются граничными узлами. Приведенные к узлам нагрузки могут задаваться как во внутренних узлах, так и в граничных узлах. Существенным моментом является применение алгоритмов действия на сеточные функции граничных операторов и обратного дифференциального оператора. На основе данного подхода были разработаны программы для решения плоских задач теории упругости и задач изгиба пластин.

5. О ПОЛУЧЕНИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ.

Важным фактором при исследовании поставленной задачи является выбор оптимального метода решения. Так применение метода Гаусса достаточно в случае плоской стационарной краевой задачи, где получается симметричная матрица с ленточной структурой. Для неположительно определенных систем, вытекающих, например, из решения задач на основе функционала Рейснера, требуется уже проведение специальных мероприятий в виде перенумеровки неизвестных, создания в системе небольших возмущений.

Для задач в трехмерной постановке, а также при нестационарных и нелинейных двумерных задачах на больших сетках следует прибегать к помощи экономичных методов, таких как: попеременно-треугольный или метод факторизации. Работы, посвященные этой тематике, можно найти у А.А. Самарского [65], Е.Г. Дьяконова [23], [24], С.К. Годунова и В.С. Рябенького [19]. При возникновении погрешности на низкочастотных составляющих решения экономичные методы применяются совместно с многосеточными, устраняющие эту проблему при помощи вспомогательных крупных сеток.

Упомянутые многосеточные методы являются частными случаями так называемого многоуровнего подхода к расчету конструкций, в настоящее время ставшего одним из основных.

Большой вклад в разработку многосеточных методов внесли Н.С. Бахвалов [4], Р.П. Федоренко [78], Л.А. Оганесян [52], Хакбуш [92] и др. Заслуживает внимания и работа В.В. Шайдурова [82], в которой многосеточные методы описаны в терминах метода конечных элементов. А.Б. Золотов, М.В. Белый и В.Е. Булгаков в работе [5] применили многосеточный метод при расчете строительных конструкций.

Необходимо сказать и о полуаналитических методах расчета конструкций. Их возникновение связано с трудностями при решении задач с большой размерностью. Добавление каждого нового измерения увеличивает необходимое для расчета время, а иногда решение задачи выходит за рамки возможностей машины. Полуаналитические методы в значительной степени облегчают работу. Этой проблематикой занимались О. Зенкевич [25], А.В. Александров [1] и ряд других ученых. В связи с появлением быстродействующей вычислительной техники в практике расчетов нашел свое применение и метод прямых, также относящийся к классу полуаналитических методов. Он удобен при расчете конструкций с постоянными физико-геометрическими характеристиками по одному из направлений. Один из первых вариантов данного метода был предложен Л.В. Канторовичем и В.З. Власовым. В дальнейшем метод широко использовался В.И. Рыбасовым, В.Н. Медведько применил данный подход для расчета плит. В диссертации П.А. Акимова подробно рассмотрены аналитические и полуаналитические решения многоточечных задач расчета конструкций.

6. ЛОКАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ДИСКРЕТНЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.

В большинстве расчетов наиболее интересным является напряженно-деформируемое состояние в наиболее опасных локальных зонах, где возможна потеря прочности. Практически все алгоритмы, связанные с построением локальных решений, обосновываются при помощи принципа Сен-Венана, который выводится, исходя из представления решения краевой задачи с использованием фундаментальной функции. При назначении шага сетки руководствуются характером убывания и сглаживания фундаментальной функции. Так если фундаментальная функция не убывает и не сглаживается, применение локальных сеток не приводит к требуемому результату.

Использование дискретной фундаментальной функции с очень малым шагом является важным моментом, так как значительно проще организовать проверочные оценки. Кроме того, дискретная фундаментальная функция не содержит особенностей, характерных для континуальной функции. Данные вопросы широко освящены в работах С.Л. Соболева [70], [71], С.К. Годунова и В.С. Рябенького [19].

Существует несколько приемов локализации решений. Одним из них является прием, широко применяющий в инженерных расчетах. Он заключается в вырезании части конструкции, в которой имеется опасная зона. Причем вырезаемая часть конструкции должна быть значительно больше интересующей зоны. Затем на границе этой зоны назначают условия, исходя из более грубого расчета или инженерной оценки. Математические оценки такого подхода основываются на специфических функциях Грина и подробно описываются в [87], [88], [89].

Следующим приемом часто пользуются при расчете конструкций методом конечного элемента. Этот прием эффективен с алгоритмической точки зрения и основан на построении локальных сеток, у которых шаг увеличивается по мере удаления от расчетной зоны. Здесь главным образом применяются треугольные сетки. Сюда относятся алгоритмы, приведенные в работах Р. Галлагера [15] и О. Зенкевича [25].

Следующие два приема являются близкими друг к другу. В одном случае используются суперэлементы в интересующих зонах [55], [73]. При другом подходе вводятся специальные элементы с функцией формы в виде полиномов высокого порядка. Это прием описан в трудах [21], [25]. Сюда же относят и приемы с введением в элементы специальной функции формы в виде решения задач концентрации и учета трещин.

Метод Монте-Карло, не требующий специальной дискретизации, является перспективным средством при локальных расчетах трехмерных задач. Его отрицательная сторона заключается в невысокой сходимости [72].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Итак, были рассмотрены различные методы расчета строительных конструкций, при этом отмечено их постоянное развитие в связи с непрерывным развитием математических и технических средств вычислительной техники, с возникающими новыми потребностями.

Наиболее распространенными численными методами в настоящее время являются метод конечных элементов и методы граничных интегральных уравнений, в традиционных постановках имеющие ряд недостатков.

Естественно, возникает потребность повысить эффективность и точность расчетов. Это стало возможным, в частности, и за счет использования метода дискретных граничных уравнений, сочетающего в себе положительные стороны метода конечных элементов и метода граничных интегральных уравнений. Выполненные авторами исследования были направлены, в частности, на разработку и развитие метода дискретных граничных уравнений для расчета строительных конструкций и изучение научно-методологических проблем его применения.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Смирнов В.А.* Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. Ч. 1 и 2. - М.: Стройиздат, 1976, 248 с.
2. *Астраханцев Г.П.* Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка с естественными граничными условиями. – ЖВМ и МФ, 1978, т. 18, №1, с. 118 – 125.
3. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982, 442 с.
4. *Бахвалов Н.С.* О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор. // ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, №5, с. 861 – 883.
5. *Белый М.В., Булгаков В.Е., Золотов А.Б.* Полуитерационный многосеточный метод и его программная реализация для решения пространственных краевых задач. // ЖВМ и МФ, 1987, т.27, №6, с. 875-888.
6. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984, 494 с.
7. *Бреббия К., Таллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987, 524 с.
8. *Вазов В., Форсайт Дж.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Издательство иностр. лит., 1963, 215 с.
9. *Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.* Пластины, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость и колебания). – Киев: Госстройиздат УССР, 1959, 1049 с.
10. *Варвак П.М.* Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях. - Киев: Изд. АН УССР, ч. 1, 1949, 136 с., ч. 2, 1952, 115 с.
11. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987, 544 с.

12. *Венцель Э.С.* Решение некоторых линейных краевых задач теории упругости со сложным оператором с помощью краевых задач. // Докл. АН УССР, сер. А, №8, 1980, с. 35 – 38.
13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988, 512 с.
14. *Власов В.З.* Избранные труды. – М.: Издательство АН СССР, т. 1, 1962.
15. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984, 428 с.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967, 576 с.
17. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959, 470 с.
18. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Гостехиздат, 1952, 480 с.
19. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разносные схемы. - М.: Наука, 1977, 440 с.
20. *Городецкий А.С.* Численная реализация метода конечных элементов. // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивильник, 1977, вып. XX, с. 31 – 42.
21. *Городецкий А.С., Завороцкий В.И., Лантух-Лященко А.И., Рассказов А.О.* Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Транспорт, 1981, 143 с.
22. *Длугач М.И.* Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1964, 260 с.
23. *Дьяконов Е.Г.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Издательство МГУ, 1971, вып. 1, 242 с.
24. *Дьяконов Е.Г.* Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. – М.: Наука, 1989.
25. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975, 539 с.
26. *Золотов А.Б.* К расчету трехмерных конструкций на ЭВМ. – Строительная механика и расчет сооружений, 1969, №6, с. 22 – 27 с.

27. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
28. *Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.* Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. - М.: МГСУ, 1992, 86 с.
29. *Золотов А.Б., Ширинская И.В., Белый М.В.* Дискретный аналог граничных интегральных уравнений. // Сб. научных трудов МГСУ: «Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве». - М.: 1995, с. 97-100.
30. *Кайтуков Т.Б.* Алгоритм вычисления дискретной фундаментальной функции Соболева для оператора Лапласа. // Сб. материалов четвертой традиционной научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и докторантов «Строительство – формирование среды жизнедеятельности». - М.: МГСУ, 2001, с. 219-222.
31. *Кайтуков Т.Б., Мозгалева М.Л., Золотов А.Б.* Метод прямых в дискретных задачах строительной механики. // БУ Депонированные научные работы №12. - М., 2000.
32. *Кайтуков Т.Б., Мозгалева М.Л., Золотов А.Б.* Построение фундаментального решения для дискретной задачи теории упругости применительно к методу прямых. // БУ Депонированные научные работы №2. - М., 2001.
33. *Кайтуков Т.Б., Мозгалева М.Л., Золотов А.Б.* Построение фундаментального решения с помощью вспомогательных краевых задач. // Сб научных трудов МГСУ №4: Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. - М. 2001, с. 134 – 138.
34. *Кайтуков Т.Б., Мозгалева М.Л., Ширинская И.В.* Решение трехмерных задач теории упругости методом дискретных граничных уравнений. // Сб научных трудов МГСУ №4: Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. - М. 2001, с. 139 – 143.

35. *Капорин И.Е., Николаев Е.С.* Метод фиктивных неизвестных для решения разностных уравнений эллиптического типа в областях сложной формы. // Докл. АН СССР, т. 251, №3, с. 544 – 548.
36. *Коренев Б.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960, 458 с.
37. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Издательство ЛГУ, 1977, 206 с.
38. *Крузо Т.* Метод граничных интегральных уравнений. – М.: Мир, 1978, с. 46 – 67.
39. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Валейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976, 664 с.
40. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971, 371 с.
41. *Лужин О.В.* Расчет плиты при сложном очертании края. // Сб. Исследования по теории сооружений, вып. XII. – М.: Гостройиздат, 1963.
42. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977, 455 с.
43. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947.
44. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962, 254 с.
45. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
46. *Мозгалева М.Л., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мсхалая Ж.И.* Метод прямых для решения пространственной задачи теории упругости вариационно-разностным методом (ВРМ). // Сб научных трудов МГСУ №3: Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. - М. 2000, с. 108-115.
47. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966, 707 с.
48. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.

49. *Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др.* Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. – М.: Машиностроение, 1989.
50. Никифоров С.Н. Теория упругости и пластичности. - М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1955, 284 с.
51. *Образцов И.Ф., Савельева Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985.
52. *Оганесян Л.А.* Метод Федоренко – Бахвалова для двумерного эллиптического уравнения в случае условий Дирихле. // Изв. АН Армянской ССР. Сер. Матем., 1963, т. 18, №2, с. 97 – 115.
53. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. – Ереван: Издательство АН Армянской ССР, 1979, 234 с.
54. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977, 312 с.
55. *Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А.* Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение, 1979, 288 с.
56. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчете судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974.
57. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1991, 439 с.
58. *Рихтмайер М., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972, 418 с.
59. *Рицци Ф.* Метод граничных интегральных уравнений – современный вычислительный метод. // Метод граничных интегральных уравнений. – М.: Мир, 1978, с. 11 – 17.
60. *Розин Л.А.* Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ методом конечных элементов. Л.: Энергия, 1971.

61. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении в упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977, 129 с.
62. *Рябенький В.С.* Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. – М.: Наука, 1987, 320 с.
63. *Рябенький В.С.* Граничные уравнения с проекторами. – УМН, т. 40, вып. 2 (242), 1985, с. 121 – 149.
64. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М: Наука, 1971, 552 с.
65. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
66. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1987, 286 с.
67. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. – М: Наука, 1976, 352 с.
68. *Саульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. – М.: Физматгиз, 1960, 324 с.
69. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1954.
70. *Соболев С.Л.* Об единственности решения разностных уравнений эллиптического типа. ДАН, 87, №2, 1952, с. 179 – 182.
71. *Соболев С.Л.* Об одном разностном уравнении. ДАН, 87, №3, 1952, с. 341 – 343.
72. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973.
73. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977, 349 с.
74. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980, 512 с.
75. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Граничные интегро-дифференциальные уравнения нестационарных динамических задач теории упругости. // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. – Днепропетровск: ДГУ, 1979, с. 197 – 204.

76. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике твердого деформируемого тела. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986, 292 с.
77. *Усюкин В.И.* Строительная механика конструкций космической техники. – М.: Машиностроение, 1988.
78. *Федоренко Р.П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса. // ЖВМ ИМФ, 1964, т. 4, №3, с. 559 – 564.
79. *Филин А.П.* Современные проблемы использования ЭЦВМ в механике твердого деформируемого тела. – Л.: Стройиздат, 1974, 73 с.
80. *Цейтлин А.И.* Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. – М.: Стройиздат, 1984, 334 с.
81. *Цейтлин А.И., Петросян Л.Г.* Методы граничных элементов в строительной механике. – Ереван: Луйс, 1987, 199 с.
82. *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989, 288 с.
83. *Шапошников Н.Н., Тарабасов Н.Д. и др.* Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. – М.: Машиностроение, 1981, 333 с.
84. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965.
85. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965, 327 с.
86. *Argiris J.H.* Energy theorems and structural analysis, part 1:. – Aircraft Engineering, 1954, v. 26, p. 347 – 356, 383 – 387, 394; 1955, v. 27, p. 42 – 58, 80 – 94, 125 – 134, 145 – 158.
87. *Babuska I., Miller A.* The post-processing approach in the finite element method. Part 1: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements. // Int. J. Numer. Meth. Engineering. 1984, v. 20, p. 1085 – 1109.
88. *Babuska I., Miller A.* The post-processing approach in the finite element method. Part 2: The calculation of stress intensity factors. // Int. J. Numer. Meth. Engineering. 1984, v. 20, p. 1111 – 1129.

89. *Babuska I., Zienkiewicz O.C., Gago J., de A. Oliveira E.R.* Accuracy estimates and adaptive refinement in finite element computations. – Wiley, 1986.
90. *Calderon A.P.* Boundary value problems for elliptic equation. Сб. трудов советско-американского симпозиума по уравнениям с частными производными в Новосибирске. – М.: Физматгиз, 1963, с. 303 – 304.
91. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. – Bull. Amer. Math. Soc., 1943, v. 49, p. 1 – 43.
92. *Hackbush W.* Multi-grid methods and applications. – Berlin, N.Y.: Springer-Verlag, 1985.
93. *Hrennikoff A.* Solution of problems of elasticity by frame work method. – J. Appl. Mech., 1941.
94. *Seeley R.T.* Singular integrals and boundary value problems. Amer. J. Math., 1966, v. 88, №4, p. 781 – 809.
95. *Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.* Stiffness and deflection analysis of complex structures. – J. Aeronaut, Sci., 1956, v. 28, p. 805 – 823.